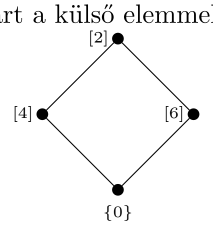
Feladat 1. Tekintsük a $2\mathbb{Z}_{12}$ gyűrűt. Határozza meg ennek a gyűrűnek az ideáljait, és rajzolja fel az ideálhálót.

Megoldás: Ennek a gyűrűnek az additív csoportja ciklikus, 2 generálja. Így négy additív részcsoport van (a $\mathbb{Z}_n$ csoportnak annyi részcsoportja van, ahány pozitív osztója van n-nek): $\{0\}$, $[6] = \{0, 6\}$, $[4] = \{0, 4, 8\}$, $[2] = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. (Itt a szögletes zárójel generált additív részcsoportot, és nem generált részgyűrűt jelöl.) Mindegyik részgyűrű, mert zárt a (belső) szorzásra. Mindegyik ideál is, mert zárt a külső elemmel vett szorzásra. Az ideálháló:



Feladat 2. Adjon olyan nemtriviális gyűrűt, melyen az $x \mapsto x^2$ leképezés gyűrűhomomorfizmus.

Megoldás: A legegyszerűbb példa $\mathbb{Z}_2$, ahol ez a transzformáció identikus. Szintén jók a zérógyűrűk, amelyekre a négyzetreemelés a triviális (mindent 0-ba vivő) endomorfizmus. Emellett jó lesz minden olyan kommuatív gyűrű, ahol teljesül a $2xy = 0$ azonosság, például $\mathbb{Z}_2[x]$.

Feladat 3. Mely pozitív egész n-ek esetén van a $\mathbb{Z}_n$ gyűrűnek nemtriviális (vagyis nemidentikus) automorfizmusa?

Megoldás: Semelyikre. Gyűrűautomorfizmus ugyanis (multiplikatív) egységelemet egységelembe visz, hiszen

$$1\varphi \cdot a = 1\varphi \cdot (a\varphi^{-1})\varphi = (1 \cdot a\varphi^{-1})\varphi = a\varphi^{-1}\varphi = a,$$

és egységelemből csak egy van gyűrűben. Ha viszont φ fixen hagyja az 1-et, akkor fixen hagyja az 1 által generált részgyűrűt is, ami pedig maga $\mathbb{Z}_n$.

Feladat 4. Igazolja, hogy minden prímrendű gyűrű kommutatív.

Megoldás: Legyen a egy nemzéró elem a p rendű $\mathbf{R}$ gyűrűben. Ekkor a generálja $\mathbf{R}$ additív csoportját, így $R = \{0, a, 2a, \ldots, (p-1)a\}$. Így van olyan $0 \leq c \leq p-1$, melyre $a^2 = ca$. Ekkor minden $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén $xa \cdot ya = xy \cdot a^2 = yx \cdot a^2 = ya \cdot xa$, így $\mathbf{R}$ kommutatív.

Feladat 5. Igazolja, hogy minden $\mathbf{R}$ gyűrű esetén

$$\mathbf{R}^{2\times 2}[x] \cong (\mathbf{R}[x])^{2\times 2}.$$

Megoldás: Legyen

$$\iota : (\mathbf{R}^\infty)^{2\times 2}[x] \to (\mathbf{R}^\infty[x])^{2\times 2}, \quad \Sigma_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} x^k \to \begin{pmatrix} \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k x^k & \Sigma_{k=0}^{\infty} b_k x^k \\ \Sigma_{k=0}^{\infty} c_k x^k & \Sigma_{k=0}^{\infty} d_k x^k \end{pmatrix}.$$

Ez jól láthatóan bijekció, és az $\mathbf{R}^{2\times 2}[x]$-re vett megszorításának képe $(\mathbf{R}[x])^{2\times 2}$. Elég tehát belátni, hogy ι gyűrűhomomorfizmus. (Azért a hatványsoron definiáltuk a ι-t, hogy nem kelljen a számolásnál bajlódni még egy változóval.)

Mind az összeadással, mind a szorzással való felcserélhetőség egy természetes–bár némileg macerás–számolással igazolható:

$$(\Sigma_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} x^k + \Sigma_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a'_k & b'_k \\ c'_k & d'_k \end{pmatrix} x^k)\iota = (\Sigma_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a_k+a'_k & b_k+b'_k \\ c_k+c'_k & d_k+d'_k \end{pmatrix} x^k)\iota =$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{k=0}^{\infty}(a_k+a'_k)x^k & \Sigma_{k=0}^{\infty}(b_k+b'_k)x^k \\ \Sigma_{k=0}^{\infty}(c_k+c'_k)x^k & \Sigma_{k=0}^{\infty}(d_k+d'_k)x^k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{k=0}^{\infty}a_kx^k & \Sigma_{k=0}^{\infty}b_kx^k \\ \Sigma_{k=0}^{\infty}c_kx^k & \Sigma_{k=0}^{\infty}d_kx^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_{k=0}^{\infty}a'_kx^k & \Sigma_{k=0}^{\infty}b'_kx^k \\ \Sigma_{k=0}^{\infty}c'_kx^k & \Sigma_{k=0}^{\infty}d'_kx^k \end{pmatrix} =$$

$$(\Sigma_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} x^k)\iota + (\Sigma_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a'_k & b'_k \\ c'_k & d'_k \end{pmatrix} x^k)\iota$$

és

$$((\Sigma_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} x^k)\cdot(\Sigma_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a'_k & b'_k \\ c'_k & d'_k \end{pmatrix} x^k))\iota =$$

$$(\Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_{k-i} & b'_{k-i} \\ c'_{k-i} & d'_{k-i} \end{pmatrix})x^k)\iota =$$

$$(\Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}\begin{pmatrix} a_ia'_{k-i}+b_ic'_{k-i} & a_ib'_{k-i}+b_id'_{k-i} \\ c_ia'_{k-i}+d_ic'_{k-i} & c_ib'_{k-i}+d_id'_{k-i} \end{pmatrix})x^k)\iota =$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}(a_ia'_{k-i}+b_ic'_{k-i}))x^k & \Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}(a_ib'_{k-i}+b_id'_{k-i}))x^k \\ \Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}(c_ia'_{k-i}+d_ic'_{k-i}))x^k & \Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}(c_ib'_{k-i}+d_id'_{k-i}))x^k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}a_ia'_{k-i}x^k)+\Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}b_ic'_{k-i})x^k & \Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}a_ib'_{k-i}x^k)+\Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}b_id'_{k-i})x^k \\ \Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}c_ia'_{k-i}x^k)+\Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}d_ic'_{k-i})x^k & \Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}c_ib'_{k-i}x^k)+\Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{i=0}^{k}d_id'_{k-i})x^k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (\Sigma_{k=0}^{\infty}a_kx^k)(\Sigma_{k=0}^{\infty}a'_kx^k)+(\Sigma_{k=0}^{\infty}b_kx^k)(\Sigma_{k=0}^{\infty}c'_kx^k) & (\Sigma_{k=0}^{\infty}a_kx^k)(\Sigma_{k=0}^{\infty}b'_kx^k)+(\Sigma_{k=0}^{\infty}b_kx^k)(\Sigma_{k=0}^{\infty}d'_kx^k) \\ (\Sigma_{k=0}^{\infty}c_kx^k)(\Sigma_{k=0}^{\infty}a'_kx^k)+(\Sigma_{k=0}^{\infty}d_kx^k)(\Sigma_{k=0}^{\infty}c'_kx^k) & (\Sigma_{k=0}^{\infty}c_kx^k)(\Sigma_{k=0}^{\infty}b'_kx^k)+(\Sigma_{k=0}^{\infty}d_kx^k)(\Sigma_{k=0}^{\infty}d'_kx^k) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{k=0}^{n}a_kx^k & \Sigma_{k=0}^{n}b_kx^k \\ \Sigma_{k=0}^{n}c_kx^k & \Sigma_{k=0}^{n}d_kx^k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \Sigma_{k=0}^{n}a'_kx^k & \Sigma_{k=0}^{n}b'_kx^k \\ \Sigma_{k=0}^{n}c'_kx^k & \Sigma_{k=0}^{n}d'_kx^k \end{pmatrix} = (\Sigma_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} x^k)\iota\cdot(\Sigma_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a'_k & b'_k \\ c'_k & d'_k \end{pmatrix} x^k)\iota$$

Feladat 6. Legyen U egy n elemű halmaz. Igazoljuk, hogy

$$(\mathcal{P}(U), \Delta, id, \cap) \cong \mathbb{Z}_2^n.$$

Megoldás: Legyen $U = \{1, 2, \ldots, n\}$, és legyen

$$\eta : \mathbb{Z}_2^n \to \mathcal{P}(U), \quad (x_1, \ldots, x_n) \to \{i : x_i = 1\},$$

ez nyilván bijekció.

Az összeadással való felcserélhetőség:

$$((x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n))\eta = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\eta = \{i : x_i+y_i = 1\} =$$

$$\{i : x_i = 1, y_i = 0\} \cup \{i : x_i = 1, y_i = 0\} = (\{i : x_i = 1\} \cap \overline{\{i : y_i = 1\}}) \cup (\{i : y_i = 1\} \cap \overline{\{i : x_i = 1\}}) =$$

$$((x_1,\ldots,x_n)\eta \cap \overline{(y_1,\ldots,y_n)\eta}) \cup ((y_1,\ldots,y_n)\eta \cap \overline{(x_1,\ldots,x_n)\eta}) = (x_1,\ldots,x_n)\eta \,\Delta\, (y_1,\ldots,y_n)\eta$$

A szorzással való felcserélhetőség:

$$((x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1,\ldots,y_n))\eta = (x_1y_1,\ldots,x_ny_n)\eta = \{i : x_iy_i = 1\} =$$

$$\{i : x_i = y_i = 1\} = \{i : x_i = 1\} \cap \{i : y_i = 1\} = (x_1,\ldots,x_n)\eta \cap (y_1,\ldots,y_n)\eta$$

Mivel a $\mathbb{Z}_2^n$ gyűrűben minden elem (additív) inverze önmaga, a $\mathcal{P}(U)$-ban is az additív ellentétet identitásnak kell választani, hogy a $(\mathcal{P}(U), \Delta, -, \cap)$ struktúra izomorf legyen a $(\mathbb{Z}_2^n, +, -, \cdot)$ struktúrával.

Azt nem kell külön bizonyítani, hogy $(\mathcal{P}(U), \Delta, id, \cap)$ gyűrű. Ha két struktúra izomorf–vagyis alaphalmazuk között van olyan bijekció, amely minden művelettel felcserélhető–akkor ugyanazokat a tulajdonságokat teljesítik, tehát ha az egyik gyűrű, akkor a másik is.